Бір нүктесі бекітілген қатты дененің қозғалысы

1. Гироскоп. Эйлер теңдеулер.
2. Нутация.

Өз симметрия өсін тез айналуға келтірілген аксиал симметриялы денені *гироскоп* деп атайды. Тікелей аударғанда гироскоп *айналуды табатын аспап* деген мағына білдіреді. Жалпы мағынада гироскоп дегеніміз – айналу өсі кеңістікте бағытын өзгерте алатын шапшаң айналған қатты дене. Гироскопқа мысал ретінде зырылдауықты, центрі арқылы өткен, бетіне перпендикуляр өсте өте тез айналған дискіні келтіруге болады. Гироскоптың тез айналуымен байланысты барлық құбылыстар *гироскоптық* деп аталады.

Гироскоп айналауының негізгі заңдарын аныктау үшін оны массалар центрінде бекіткен ыңғайлы (ары қарай гироскоп ретінде тез айналатын дискіні қарастырамыз). Қажетті бекіту гироскоп осіне үш өзара перпендикуляр бағытта бағдарын еркін өзгертуге мүмкіндік беретін Кардан аспасы көмегімен жүргізіледі.

Егер барлық үш өстегі подшипниктердегі үйкелесті және сақиналардың импульс моментін ескермеу шарты орындалса, мұндай гироскоп *еркін* деп аталады. Қатты дене бекітілген нүктенің төңірегінде қозғалғанда бұрыштық жылдамдық векторы жалпы жағдайда кеңістіктегі бағытын және денеге салыстырмалы бағдарын өзгертеді, яғни айналу лездік өсі өзінің бағдарын өзгертеді. Координаталық жүйенің бастама нүктесін дене бекітілген нүктеде – инерция центрінде орналастырайық. Координаталық өстерді инерцияның бас өстерінің бойымен бағыттаймыз.

Бұл жағдайда инерция тензоры өзінің үш I_1, I_2, I_3 бас компоненталарымен өрнектеледі, ал импульс моменті тіпті қарапайым түрге келеді: $L_1 = I_1\omega_1$; $L_2 = I_2\omega_2$; $L_3 = I_3\omega_3$. Мұндағы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - бұрыштық жылдамдық векторының денемен бірге қозғалған координаталар өстеріне проекциялары.

Гироскоптың $\vec{L}$ импульс моментін қозғалатын санақ жүйесіндегі компоненталары арқылы өрнектейміз:

$$\vec{L} = \vec{i}_x L_x + \vec{i}_y L_y + \vec{i}_z L_z$$

немесе

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{i}_x \frac{dL_x}{dt} + \vec{i}_y \frac{dL_y}{dt} + \vec{i}_z \frac{dL_z}{dt} + \frac{d\vec{i}_x}{dt} L_x + \frac{d\vec{i}_y}{dt} L_y + \frac{d\vec{i}_z}{dt} L_z \qquad (121)$$

Осы теңдеудегі соңғы үш мүшені былай жазуға болады:

$$\frac{d\vec{i}_x}{dt} L_x + \frac{d\vec{i}_y}{dt} L_y + \frac{d\vec{i}_z}{dt} L_z = (\vec{\omega} \times \vec{L})$$

Ал, (121)-дің оң жағындағы бірінші үш мүше - $\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}$ -ге тең. Сонымен, (121) теңдеу

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + (\vec{\omega} \times \vec{L}) \qquad (122)$$

түрге келеді, немесе

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + (\vec{\omega} \times \vec{L}) \qquad (123)$$

теңдеуін аламыз.

(123) теңдеудің қозғалатын координаталар жүйесіндегі проекциялары мына түрде болады:

$$M_x = I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z$$

$$M_y = I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x \qquad (124)$$

$$M_z = I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y$$

Алынған теңдеулерді *Эйлер теңдеулері* деп атайды. Жалпы жағдайда олар бір нүктесі бекітілген қатты дененің қозғалысын анықтайды.

(124) қатынастарды еркін гироскоп үшін жазып шығайық. Гироскоптың симметрия өсі бойында x өсі орналасып, ал y және z өстері қалған екі центрлік бас өстер бойымен бағытталсын. Гироскоптың симметриясынан $I_x = I_1; I_y = I_z = I_2$ екені айқын. Онда еркін гироскоп (M=0) үшін (124) теңдеулер

$$I_1 \frac{d\omega_x}{dt} = 0$$

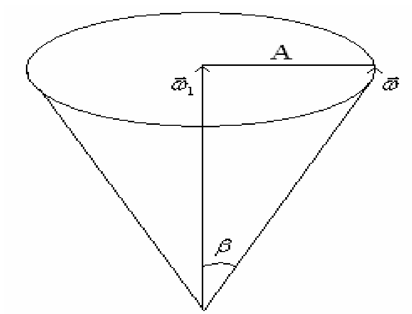
$$I_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (I_1 - I_2)\omega_z\omega_x = 0 \qquad (125)$$

$$I_2 \frac{d\omega_z}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_x\omega_y = 0$$

түрге келеді. Бірінші теңдеуден $\omega_x = \omega_1 = const$ екенін көреміз, яғни $\vec{\omega}$ -ның гироскоптық симметрия осіне проекциясы уақыт бойынша тұрақты болады. Енді (125) жүйенің екінші және үшінші теңдеулерін түрлендірейік:

$$\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_0\omega_x = 0$$
$$\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_y\omega_0 = 0 \qquad (126)$$

мұнда $\omega_0 = \omega_1 \frac{I_1 - I_2}{I_1}$ - тұрақты шама. Бұл теңдеулердің шешімдері ретінде



10 Сурет.

$$\omega_y = A\cos\omega_0 t$$
$$\omega_z = A\sin\omega_0 t \qquad (127)$$

функцияларын алуға болады.

(127) шешімдерді талдай отырып, $\vec{\omega}$ вектор шамасын тұрақты сақтап, гироскоптың симметрия осін айнала жылдамдықпен конус сызатыны туралы қорытындыға келеміз (10 сурет). Шешімдер құрамындағы А шама ($A=\sqrt{\omega_y^2+\omega_z^2}$) бастапқы шарттарға тәуелді. Конустық бұрыш A/ω_1қатынасымен анықталады, ω_0/ω_1 шама инерцияның бас моментерінің қатынасына, яғни гироскоп массасының үлестірілуіне тәуелді. Қорыта келе еркін гироскоптың қозғалысын былай суреттеге болады: $\vec{\omega}$ лездік жылдамдық және симметрия өсі жатқан жазықтық $\vec{L}$ векторын $\vec{\omega}_0$ бұрыштық жылдамдықпен айналады және айналу барысында $\vec{\omega}$ векторы мен симметрия өсінің өзара салыстырмалы орындары өзгермейді. Симметрия өсінің кеңістікте қозғалмайтын $\vec{L}$ импульс моменті векторын айнала қозғалуын *нутация* дейді, ал $\vec{\omega}_0$ - нутация жылдамдығы. Нутация амплитудасы бастапқы шарттарға тәуелді. Егер гироскоптың бұрыштық жылдамдық векторы симметрия өсінде жатса, ол нутациясыз айналады.

Инерциялық емес санақ жүйелері

1. Инерциялық күштер
2. Түзусызықты ілгерілемелі қозғалыстағы инерциялық емес санақ жүйелері.
3. Инерциялық емес айналыстағы санақ жүйелері.

Инерциялық емес санақ жүйесі деп, инерциялық санақ жүйесіне салыстырғанда үдемелі қозғалатын жүйені айтады.
Біз қозғалысты релятивистік емес механика шеңберінде ғана қарастырамыз, бұл жерде Галилей түрлендірулері және басқа да кеңістіктік-уақыттық қатынастар инерциялық санақ жүйелеріндегідей орындалады деп есептелінеді.

Инерция күші. Инерциялық санақ жүйелерінде күш материялық денелердің әсерлесуінің нәтижесі деп есептейміз, денеге үдеу беретін осы күш. Инерциялық емес санақ жүйелерінде денені санақ жүйесінің қозғалыс күйін қарапайым өзгерте отырып үдетуге болады. Осыған байланысты бұл жерде Ньютонның бірінші заңы орындалмайды деп есептейміз. Ньютонның үшінші заңы да орындалмайды.

Механикада тарихи мынадай жағдай қалыптасқан: инерциялық емес санақ жүйесінде дененің үдеуін «кәдімгі» әсерлесу күшінен басқа, инерция күші деп аталатын күш те туғыза алады деп есептелінеді. Ньютонның екінші заңы бұл жағдайда өзгеріссіз алынады, бірақ әсерлесу күшімен бірге инерция күшін де ескеруіміз керек. Осыған байланысты инерциялық емес санақ жүйелерінде Ньютонның екінші заңы былай беріледі.

$$m\vec{a'} = \vec{F} + \vec{F_{ин}} \tag{128}$$

бұл жерде $\vec{a'}$ – инерциялық емес санақ жүйесіндегі үдеу, $\vec{F}$ – «кәдімгі» күш, $\vec{F}_{ин}$ – инерция күші.

Қандай да бір дененің инерциялық емес және инерциялық санақ жүйелеріндегі қозғалыс теңдеулерін жазайық:

$$m\vec{a'} = \vec{F} + \vec{F_{ин}} \tag{129}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{130}$$

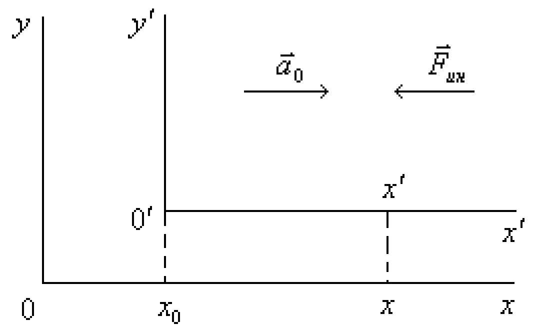
мұндағы «кәдімгі» әсерлесу күші $\vec{F}$ екі санақ жүйелерінде де бірдей; $\vec{a'}$ және $\vec{a}$ – сәйкесінше инерциялық емес және инерциялық санақ жүйелеріндегі үдеулер.

(129) және (130) теңдеулерден инерция күшін табуға болады:

$$\vec{F}_{ин} = m\left(\vec{a}' - \vec{a}\right) \qquad (131)$$

Инерциялық санақ жүйесіне салыстырғандағы $\vec{a}$ үдеу абсолюттік үдеу деп, ал инерциялық емес санақ жүйесіне салыстырғандағы $\vec{a}'$ үдеу салыстырмалы үдеу деп аталады.

Түзусызықты ілгерілемелі қозғалыстағы инерциялық емес санақ жүйелері. Инерциялық емес санақ жүйесі, инерциялық санақ жүйесінің *x* өсі бойымен түзусызықты қозғалсын делік (11 сурет).



11 Сурет.

Қандай да бір нүктенің координаталарының арасындағы байланыс мынадай формулалармен беріледі

$$x = x_0 + x', \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t' \qquad (132)$$

Бірнеше түрлендірулерден кейін келесі формулаларды аламыз.

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon' \tag{133}$$

және

$$a = a_o + a', \tag{134}$$

мұндағы *υ* мен *a* сәйкесінше абсолюттік жылдамдық және үдеу, υ_0 мен a_0 тасымал жылдамдық және үдеу, ал υ' мен a' салыстырмалы жылдамдық және үдеу.

(134) өрнекті қолдана отырып (131) формуланың көмегімен түзусызықты қозғалыстағы инерциялық емес санақ жүйесіндегі инерция күші өрнегін былай жазуға болады

$$F_{ин} = m(a' - a) = -ma_o \tag{135}$$

немесе векторлық түрде

$$\overrightarrow{F_{ин}} = -m\overrightarrow{a_o}, \tag{136}$$

былайша айтқанда инерция күші инерциялық емес жүйенің тасымал үдеуіне кері бағытталған.

Инерциялық емес айналыстағы санақ жүйелері. Түзу сызықтың бойымен қозғалатын инерциялық емес координат жүйелеріндегі абсолюттік, тасымал және салыстырмалы жылдамдықтар мен сәйкесінше үдеулердің арасындағы қатынастардың ұқсас екенін біз көргенбіз (133) және (134) формулалар). Айналыстағы жүйелерге қатысты мәселе күрделірек. Басқы айырмашылық, айналыстағы координат жүйесінің әртүрлі нүктелерінің тасымал жылдамдықтарының әртүрлі болуында. Абсолюттік жылдамдық бұрынғысынша тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың қосындысы болып табылады:

$$\vec{V} = \vec{V_o} + \vec{V'}, \qquad (137)$$

ал абсолюттік үдеу мұндай қарапайым түрде берілмейді.

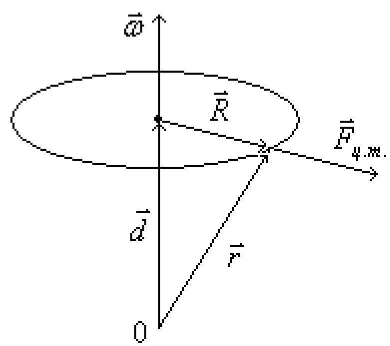
Айналыстағы координат жүйесінің бір нүктесінен екінші нүктесіне орын ауыстырғанда нүктенің тасымал жылдамдығы өзгереді. Сондықтан, егерде тіпті нүктенің қозғалыс кезіндегі салыстырмалы жылдамдығы өзгермегенмен де, ол тасымалдан өзгеше үдеуді қабылдайды. Осыған байланысты, айналыстағы кооридинат жүйесі үшін абсолюттік үдеу үшін өрнекке тасымал және салыстырмалы үдеулердің қосындысынан өзге, $a_к$ кориолис үдеуі деп аталатын тағы бір үдеу кіреді:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_o} + \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a_K}, \qquad (138)$$

Мұндағы $\overrightarrow{a_o} = \vec{w} \times \overrightarrow{v_o} = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$ – тасымал үдеу, $\overrightarrow{a'} = \frac{dv'_x}{dt}\overrightarrow{i'_x} + \frac{dv'_y}{dt}\overrightarrow{i'_y} + \frac{dv'_z}{dt}\overrightarrow{i'_z}$ – салыстырмалы үдеу, $a_K = 2\vec{w} \times \overrightarrow{V'}$ – кориолис үдеуі. Тасымал үдеуді басқаша түрде көрсетуге болады

$$\overrightarrow{a_o} = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = -w^2 \vec{R}, \qquad (139)$$

мұндағы $\vec{R}$ – айналу өсіне перпендикуляр вектор (12 сурет). Сонымен, тасымал үдеу ценртгетарқыш болып табылады.



12 Сурет

(131) жалпы формула бойынша (138) өрнектің көмегімен айналыстағы координат жүйесіндегі инерция күшін табуға болады

$$\overrightarrow{F_{ин}} = m(\overrightarrow{a'} - \vec{a}) = m(-\overrightarrow{a_o} - \overrightarrow{a_K}) = mw^2\vec{R} - 2m\vec{w} \times \vec{v'} = \vec{F}_{ц.т.} + \overrightarrow{F_K} \qquad (140)$$

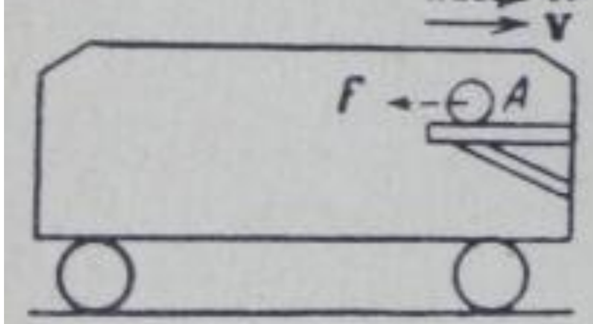
Тасымал үдеумен байланысты $\overrightarrow{F}_{ц.т.} = mw^2\overrightarrow{R}$ инерция күші центрден тепкіш инерция күші деп аталады. Ол айналу өсінен әрі радиус бойымен бағытталған (12 сурет). Кориолис үдеуімен байланысты $\overrightarrow{F_K} = -2m\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{V'}$ инерция күші Кориолис күші деп аталады. Ол бұрыштық және салыстырмалы жылдамдықтардың векторлары жататын жазықтыққа перпендикуляр.

Енді системаның ішінде болып жатқан процестерге оның үдеуінің тигізетін ықпалын толығырақ қарастырайық. Бұл үшін тағы да қозғалған вагонды мысалға алайық. Мысалы, алғашқыда вагон, 1-суреттегі стрелкамен көрсетілген бағытпен, түзу сызық бойымен тұрақты v жылдамдығымен қозғалып бара жатсын. Вагонның алдыңғы кабырғасындағы горизонталь сөренің үстінде А шары жатсын, онын массасы m болсын. Сөренің беті абсолют жылтыр деп есептейік, сонда сөре мен шардың арасында ешбір үйкеліс күштері пайда болмайды. Вагонның ішінде болған құбылыстарды мына екі санау системасының біреуіне қатысты: 1) темір жол төсенішімен байланысулы санау системасына қатысты немесе 2) вагонға байланысулы санау системасына қатысты қарастырайық. Қозғалыс түзу сызыкты және бір қалыпты болғанда шарға екі системада да (бірін-бірі теңгеріп тұратын ауырлық күші мен тіреудің реакция күшінен басқа) ешбір күш әсер етпейді. Енді вагон тұрақты w үдеу алады дейік, ол үдеу де вагонның v жылдамдығы бағытталған жаққа карай бағыттал- ған болсын; сонда вагон барған сайын жылдамырақ қозғалады.

Бұл жағдайда осы айтылған санау системаларының екеуіне қатысты шардың козғалысы қалай білінеді?

Алдымен темір жол төсенішімен байланысты санау системасына қатысты шар козғалысының сипатын анықтайық. Төсенішпен салыстырғанда шар бастапкы v жылдамдығымен қозғала береді, өйткені оған ешбір горизонталь күш әсер етпейді, бірақ вагон жылдамырақ қозғала бастағандықтан, шар вагоннан қалыңқырайды.

1- сурет



Егер вагонмен байланысулы санау системасында (инерциялы емес) Ньютонның екінші заңы дұрыс деп ұйғарсақ, сонда бұл системада үдеу пайда болуын шарға мына күш әсер етті деп түсіндіруге болады:

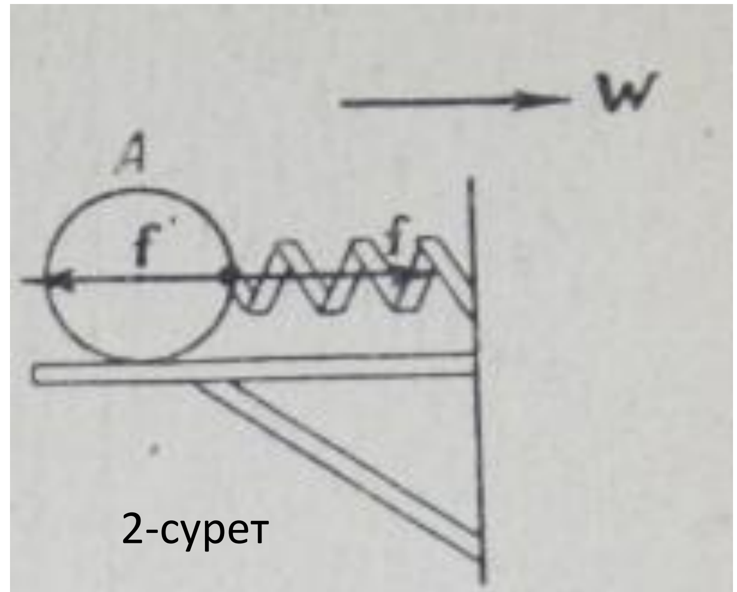
$f' = m(-w)$,

мұндағы m — шардың массасы, —w — шардың вагонмен салыс тырылған үдеуі, ол сан жағынан алғанда вагонның үдеуіне тең

Үдемелі санау системасында Ньютонның екінші заңы орындалу үшін осы системаға енгізілген жалған күшті инерциялык күш немесе инерция күші деп атайды.

Енді сөреде жатқан шар С пружинасы аркылы вагонның қабырғасына бекітілген деп жориық (2-сурет). Бұл жағдайда вагон үдей қозғалса, шар вагоннан қала бастайды да, пружина созылады, сонын нәтижесінде пайда болған күш шарға тек вагоннын үдеуіне тен w үдеуін бергенше ғана шар вагонға ілесе алмайтын болады. Басқа сөзбен айтқанда: пружина шарды вагонның соңынан ілестіре f күшімен тартады; бұл күш шарға түсіріледі, вагонның w үдеуі бағытталған жаққа қарай бағытталады, шама жағынан mw-re тең болады: мұндағы m — шардың массасы. Ньютонның үшінші заңы бойынша екінші f1 күші де бар, ол f1 = —f , бұл күш пружинаға түсіріледі, әрі вагон үдеуінің бағытына карама-қарсы жаққа қарай бағытталады.

Вагонмен байланысулы санау системасымен салыстырғанда, пружина созылып болған соң шар, вагонмен салыстырғанда, тағы тыныштық күйде болады. Сондықтан осы санау системасында Ньютонның екінші заңына сәйкес, шарға түсірілген күштердің косындысы нольге тең болуы керек. Егер шарға f' инерциялык күшін түсіріп және бұл күш шарды созылған пружина тартқан і күшін теңгереді деп есептесек, сонда бұл талап орындалады. Осы инерциялык күш f' = f1; сонымен Ньютонның үшінші заңының орындалуына байланысты пайда болған және үдемелі санау системасында пружинаға («байламға») түсірілген fi күшін біз дененің өзіне (А шарына) түсіреміз. Вагонмен байланысулы үдемелі системаны пайдаланып, динамика есебін статика есебімен, шардың тепе-теңдігі туралы есеппен, алмастырамыз. Ол үшін біз, жоғарыда айтылғандай. А шарына тек оған әсер етуші нақты f күші ғана емес, байламға әсер етуші f1 күші де түсірілген деп есептейміз. Кез келген үдемелі қозғалыста, динамика есебін статика есебімен осылай алмастыруға болады.



2-сурет

Мысалы, массасы m материялық нүктеге f күші әсер етсін. Бұл материялық нүкте козғалысының теңдеуі Ньютонның екінші заңы арқылы өрнектеледі:

f = mw,

мұндағы w — материялық нүктенің үдеуі. Бұл теңдеуді былай жазуға болады:

f+ (-mw) =0.

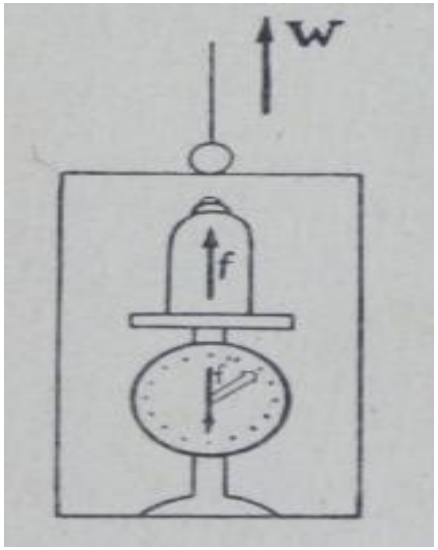
Ньютонның үшінші заңы бойынша $f_1 = — mw$ шамасы, қарастырылып отырған материялық нүктеге әсер етіп, оған үдеу беретін денелерге түсетін күш болып табылады. Материялык нүктенің өзіне ойша f_1 күшіне тең f' күшін түсіріп, оның инерция күші деп атасак, сонда

$$f+f' = 0,$$

яғни әрбір уақыт кезеңінде инерция күші мен материялық нүктеге түсірілген күш бірін-бірі теңгеріп тұрады. Бұл қағида Даламбер бастамасы деп аталады.

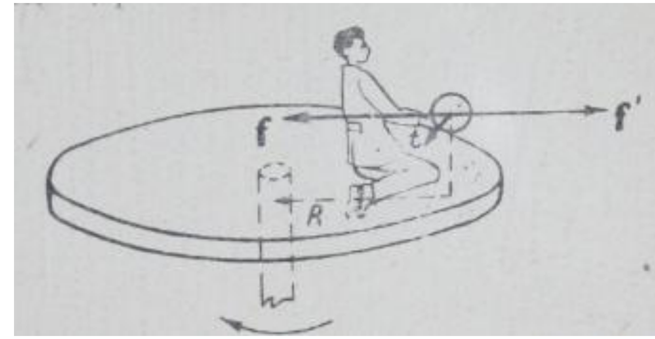
Инерциялық күштердің пайда болуына тағы бірнеше мысал карастырайық. Мысалы, лифтінің еденінде жүк жатсын, оның массасы m болсын. Егер лифті w үдеуімен жоғары көтерілсе, онда жүк те дәл сондай үдеу алады. Жүкке бұл үдеуді еден тарапынан түсірілген қысым береді, ол қысым, жүктің салмағын теңгеріп тұрған қысымға қарағанда, қосымша қысым болып табылады. Бұл қысымның күші f = mw. Ньютонның үшінші заңы бойынша жүк те еденге қосымша қысым күшін түсіреді, ол күш f1 = — f. Егер жүк еденнің өзінде жатпай, пружиналы таразы табағының үстінде тұрса (3-сурет), онда f1 күші таразыға қысым түсіреді; таразының пружинасы күштірек жиырылады, егер лифтінің үдеуі жоқ кезде, таразының көрсетуінше жүк салмағы P болса, енді таразыдағы жүк салмағы P' = = P + f' болғанын көреміз, мұндағы f'=f1.

Егер лифті w үдеуімен төмен түссе, онда лифтімен бірге жүк те дәл сондай үдеумен төмен түсе бастайды. Жүкке әсер ететін ауырлық күшінің біраз бөлігі оған үдеу береді. Күштің бұл бөлігі мынаған тең: f=mw, сонда жүктің таразыға түсіретін қысымы: P' = P—f = P + f'. Бұл жағдайлардың екеуінде де таразының көрсетуі лифтінің үдеуі жоқ кездегі көрсетуінен (P-ден) баска болады, өйткені біз динамика мәселесін — жүктің w үдеуі бар қозғалысын — қарастырып отырмыз. Ал лифтімен берік тіркеулі санау системасымен салыстырғанда жүк екі жағдайда да тыныштық күйінде қалады, ал таразы көрсетулерінің өзгеруін, жүктің шын P салмағына f инерция күші қосылып, жүк салмағының өзгергендігінен болды деп ұғынуға болады (сонда: егер лифтінің w үдеуі жоғары қарай бағытталса, f' күші P бағытталған жаққа қарай бағытталады, ал егер w төмен карай бағытталса, онда ол P-ге қарама-қарсы бағытталады).



3 - сурет

Айналып тұрған системада инерциялық күштердің пайда болуын да дәл осылайша түсіндіруге болады. Мысалы, каруселъде отырған адам қолына тас ұстап отырсын, оның массасын m дейік (4-сурет). Тас карусельмен бірге қозғалу үшін, яғни радиусы R дөңгелек сызу үшін (мұндағы R — карусельдің осінен тасқа дейінгі кашықтык), тасқа центрге тартқыш үдеу $w_n = \omega^2 R$ берілуі қажет; мұндағы ω — карусель айналысының бұрыштық жылдамдығы. Ол үшін тасқа центрге тартқыии $f = mw^2R$ күші түсірілуі керек. Тасты бұрылуға мәжбүр ету үшін адам оны үздіксіз өзіне карай тартып отыруы керек. Егер f күші болмаса, тас t жанамасы бойымен қозғала бастаған болар еді. Ньютонның үшінші заңы бойынша тас адамның қолына f_1 күшімен әсер етеді, ол күш f_1 = —f; осы f_1 күші адамның қолына түседі және карусельдің центрінен сыртка қарай бағытталады; алдын бұл күш центрден тепкіш күш деп аталған болатын.



4-сурет

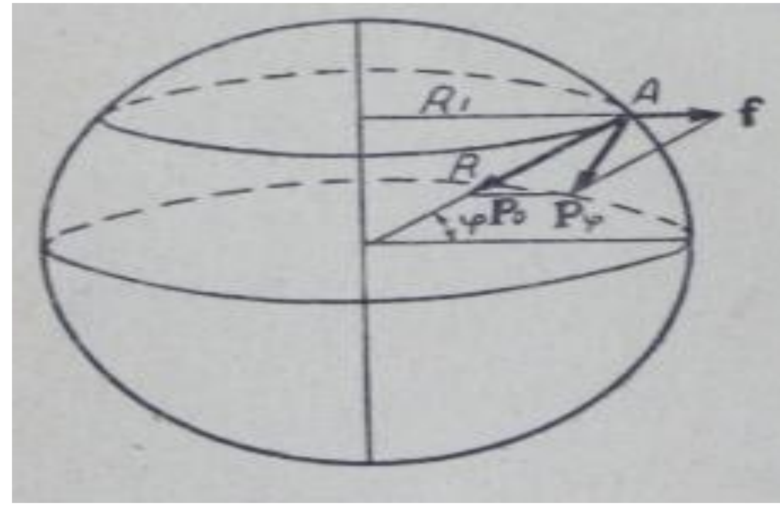
Егер барлық процесті дискімен қоса айналатын санау системасына қатысты қарастыратын болсақ онда тас айналыс кезінде бұл системада қозғалмай тұрады, ал оған f күшін түсірудің қажет екендігін, сол тастың өзіне карусельдің центрінен сыртқа қарай бағытталған және f_1 күшіне тең f' күшінің түсу нәтижесі деп қарастыруға болады. Бұл күш, үдей қозғалған вагон мен лифтіні мысалға алып қарастырылған инерциялық күштерге ұқсас, инерциялық күш болады.

Айналып тұрған системада әсер етуші инерциялық күшті кейде центрден тепкіш инерциялық күш деп атайды. Бірақ оны, алдын айтылған, шын центрден тепкіш күшпен шатастырмау керек.

Күнделікті тұрмыста бізге инерциялық күштер жиі кездесіп отырады. Мысалы, трамвайды кенет тормоздай бастаса немесе оны қатты жүріп келе жатқанда бұра бастаса, онда біз бірінші жолы, трамваймен салыстырғанда, алға қарай ұмтыла түсеміз; екінші жолы — бұрылумен салыстырғанда сыртқы жаққа қарай қисаямыз; бұлай болудың себебі: біз бұрынғы жылдамдығымызды сақтаймыз, ал вагонға үдеу пайда болады. Вагонмен тіркеулі санау системасына салыстырып қарағанда, бұл салыстырмалы жылжулар инерциялық күштердің әсерінен болады. Осы инерииялық күштерді инерциялык системада әсер ететін күштерге қосымша күш ретінде есепке алуға тура келеді.

Ауырлық кушінің географиялык ендікке тәуелділігі.

Үдемелі системада, атап айтканда айналушы системада, инерциялык күштерді пайдалану әр түрлі механикалык есептерді шешу үшін өте қолайлы болады. Тәуліктік айналыс жасайтын жер шары осындай айналушы система болып табылады сондықтан Жер бетінде болатын әр түрлі механнкалык процестерді дәлірек карастырғанда тәуліктік айналыстан пайда болатын инерция күштері есепке алынуы керек. Бұл күштер үлкен емес, сондыктан көп жағдайларда оларды елемей, жоғарыда айтылғандай шамада. Жерді инерциялык санау системасы деп есептеуге болады. Алайда, кейбір жағдайларда Жердің тәуліктік айналысын елемеуге болмайды.



5-сурет

Жердін тәуліктік айналысынын ауырлык күшіне тигізетін ыкпалын қарастырайық. Ауыр А денесі φ ендікте тұрсын оның массасы *m* болсын (5-сурет). Жермен бірге айналатын координаталар системасына қатысты есепті шығарғанда мынадай инерциялык күшпен санасуымыз керек:

$$f = m\omega^2 R_1, \qquad (1)$$

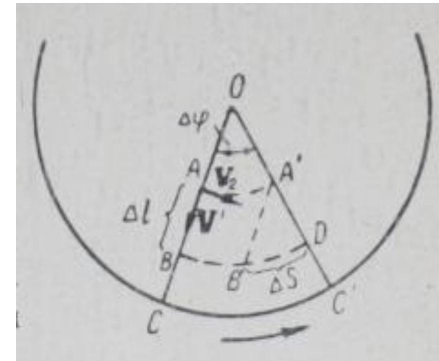
мұндағы ω—Жер айналысының бұрыштык жылдамдығы, R_1— Жердің өсінен денеге дейінгі кашыктык. f күші жердің осіне перпендикуляр бағытталған. Бұл f күші дененің Жер центріне карай бағытталған P_0 ауырлық күшімен қосылады. Осылай болғандыктан дененін ендікте байқалатын салмағы мынаған тең:

$$P_\varphi = P_0 + f. \qquad (2)$$

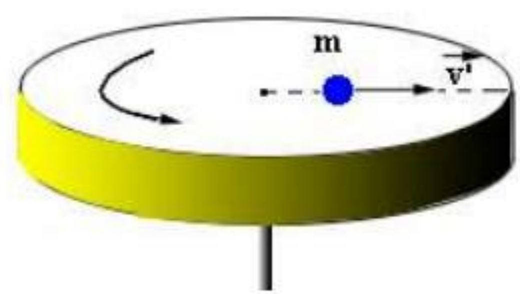
Бұл теңдіктін оң жағындағы векторлык қосынды болады.

Кориолис күштері.

Айналып тұрған системада осы системамен салыстырғанда *орын ауыстырушы* денеге, центрден тепкіш күштен басқа, тағы бір қосымша күш әсер ететіндігін көрсетейік. Ол күшті француз математигі Кориолистың (1795—1843) құрметіне *Кориолис күші* деп атайды, ол айналып тұрған системамен салыстырғандағы дененің v жылдамдығына және айналу ω бұрыштық жылдамдығына байланысты болады.



6-сурет



Әуелі дербес жағдайды қарастырайық. Система дегеніміз тұракты ω бұрыштық жылдамдығымен вертикаль О осінен стрелкамен көрсетілген бағыт бойынша айналатын дискі болсын (6-сурет). Мысалы, денесі, дискімен салыстырғанда, А нүктесінен шығып ОС радиусының бойымен v' жылдамдықпен бір қалыпты қозғалсын. Δt уақыты ішінде m денесі $\Delta \iota$= AB=v'Δt жол жүреді. ОС радиусы осы t уакыты ішінде қозғалмайтын координаталар системасында, дискі айналғандықтан, $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ бұрышына бұрылады, дене А-дан D-re жылжып барады. Қозғалмайтын координаталар системасында m денесі бір мезгілде екі қозғалысқа: дискімен саластырғанда v' жылдамдығымен болатын қозғалысқа және айналған дискімен бірге болатын қозғалысқа қатысады. Дискінің әр түрлі нүктелері үшін дискінің айналыс сызықтық жылдамдығы түрліше болады. Оның А нүктесіндегі мәнін v, әрпімен белгілейік. Егер m денесі тек v_r айналыс жылдамдығымен козғалса, онда ол АА' доғасын сызып, А' нүктесіне келген болар еді. Ал бір мезгілдің ішінде v_r жылдамдығымен және v' салыстырмалы жылдамдығымен қозғалған соң, m денесінің В' нүктесіне келуі керек еді {A'B'\\AB). Шындығында m денесі D нүктесіне ауысады. Мұның осылай болуының себебі: m денесі айналыс центрінен қашықтаған сайын айналыстың v_r сызықтық жылдамдығы артып отырады. Сонымен, қозғалмайтын координаталар системасымен салыстырғанда, радиус бойымен қозғалған m денесінің жылдамдығы үздіксіз өзгеріп отырады: ол үдей козғалады. Оның ω үдеуінің шамасын m денесінің Δt уақытта жүрген қосымша s = B'D жолы аркылы анықтауға болады. 6-суреттен мынаны табамыз:

$$\Delta s = A'B' \cdot \Delta\varphi$$

немесе, $A'B' = \Delta l = v'\Delta t$ және $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$ болғандықтан,

$$\Delta s = \omega v' (\Delta t)^2. \qquad (1)$$

Сонымен, Δs қосымша жолы Δt уақытының квадратына пропорционал болып өседі. Осылайша жолдың уақыттың квадратына пропорционал болып өсуі тұрақты ω үдеуімен қозғалған жағдайда (бір қалыпты үдемелі қозғалыста) кездеседі:

$$\Delta s = \frac{1}{2} w\, (\Delta t)^2.$$

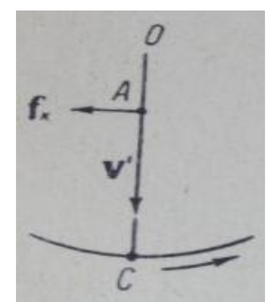
Осы теңдікті (1) теңдікпен салыстырып, m денесіне берілетін үдеуді табамыз:

$$w = 2v'\omega. \qquad (2)$$

Осы үдеу салыстырмалы v' жылдамдығына перпендикуляр болады және ол біз қарастырып отырған мысалда оң жаққа қарай бағытталған. m денесіне осындай үдеу беру үшін оған оң жаққа қарай бағытталған f күшін түсіру кажет, ол f=mw мұндағы m — дененің массасы. Егер f күші болмаса, онда дене дискімен бірге айналған координаталар системасында өзінің дискі радиусы бойымен қозғалған «түзу сызықты» козғалысынан ауған болар еді.

Ньютонның үшінші заңы бойынша шама жағынан f күшіне тең, бірақ оған карама-карсы бағытталған $f_к$ күші m денесі қозғалғанда оны радиуста ұстаушы байламдарға түседі, ол:

$$f_k = 2v'\omega m. \qquad (3)$$



Осы f_k күші Кориолис күші деп аталады

Енді, m денесі дискінің үстінде центрі айналыс осінде жатқан.шеңбер бойымен козғалғанда да. Кориолис күші әсер ететіндігін көрсетейік (7-сурет). m денесі дискімен салыстырғанда v' жылдамдығымен козғалған кезде оның *қозғалмайтын координаталар системасындағы толық жылдамдығы* $\upsilon_r + \upsilon'$ -қа тең болады, мұндағы υ_r—дискінің денесі тұрған орны айналысының сызықтық жылдамдығы. Сондықтан m денесіне мынадай центрге тартқыш күш әсер етеді:

$$f_ц = \frac{m(v_r + v')^2}{R},$$

мұндағы R — айналыс осінен денеге дейінгі қашықтық. Осы формуладағы $(v_r + v')$ қосындысының квадратын тапсақ, онда мынау шығады:

$$f_ц = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m.$$

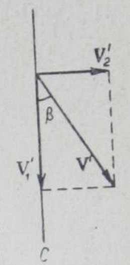
Дискімен байланысулы координаталар системасында $\frac{mv_r^2}{R}$ мүшесі центрден тепкіш инерциялық күшті анықтайды, ол күш диск ω бұрыштық жылдамдығымен айналғанда пайда болады; $\frac{mv'^2}{R}$ мүшесі, дене радиусы R дөңгелекпен v' салыстырмалы жылдамдығымен қозғалғанда, пайда болатын центрден тепкіш күшті анықтайды; мына мүшесі бір

$$f = 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m = 2v'\omega m$$

мезгілде әрі дискінің айналуы, әрі дененің дискімен салыстырғанда қозғалуы нәтижесінде пайда болған қосымша күшті анықтайды.

f күшіне тең, бірақ оған қарама-қарсы жаққа қарай бағытталған, f_k күші бұл жағдайда Кориолис күші болып табылады.

Бұл күш шама жағынан радиус бойымен қозғалғанда пайда болатын күшке дәл келеді [(3) формула], бұл да салыстырмалы жылдамдыққа перпендикуляр болып бағытталады.



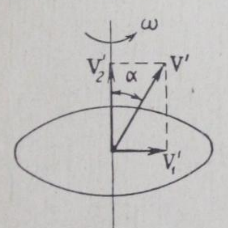
51-сурет. Салыстырмалы жылдамдықты радиус бойымен бағытталған v_1' құраушыға және радиусқа перпендикуляр v_2' құраушыға жіктеу.

Енді мынадай жағдайды қарастырайық: a денесі $\mathbf{v}'$ салыстырмалы жылдамдығымен қозғалсын және ол жылдамдықтың бағыты OC радиусымен β бұрышын жасасын (51-сурет).

Бұл жағдайда $\mathbf{v}'$ жылдамдығын екі құраушыға жіктеуге болады; сонда олардың біреуі радиус бойымен бағытталған: $v'_1 = v' \cos\beta$, екіншісі радиусқа перпендикуляр: $v'_2 = v' \sin\beta$ болсын.

(3) формула бойынша v'_1 құраушысына $f_{k^1} = 2v'\omega\cos\beta \cdot m$ *Кориолис күші*, v'_2 құраушысына $f_{k^2} = 2v'\omega\sin\beta \cdot m$ күші сәйкес келеді; сонда Кориолистің толық күші

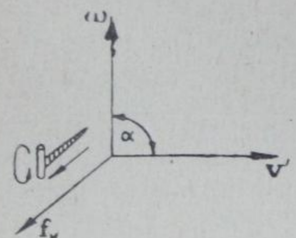
$$f_k = \sqrt{f_{k_1}^2 + f_{k_2}^2} = 2v'\omega m.$$



52-сурет. Салыстырмалы жылдамдықты айналыс осіне перпендикуляр $\mathbf{v}_1'$ құраушыға және сол осьтің бойымен бағытталған $\mathbf{v}_2'$ құраушыға жіктеу.

Сонымен, $\mathbf{v}'$ салыстырмалы жылдамдығының кез келген бағыты үшін Кориолис күші (3) формуламен өрнектеледі.

Ақырында, дененің қозғалған бағыты айналыс осімен α бұрышын жасайтын жалпылама жағдайды қарастырайық (52-сурет). Сонда $\mathbf{v}'$ жылдамдығын айналыс осіне перпендикуляр $\mathbf{v}'_1$ құраушысына және айналыс осіне параллель $\mathbf{v}'_2$ құраушысына жіктейміз. Соңғы құраушы осьтен ара қашықтықтың өзгеруіне ешбір себепші болмайды, олай болса ол қосымша үдеулер мен күштер туғыза алмайды. Сондықтан Кориолис күшінің шамасы тек $v'_1 = v' \sin \alpha$ құраушысымен ғана анықталады. (3) формуладағы v'-тің орнына $v'_1 = v' \sin \alpha$ жазылса, сонда Кориолис күшінің жалпы формуласы шығады:



53-сурет. Кориолис f күшінің бағытын анықтау.

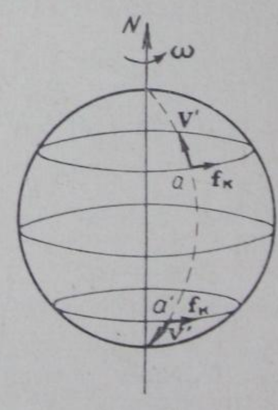
$$f_k = 2v'\,\omega \sin \alpha \cdot m. \tag{4}$$

Барлық жағдайда Кориолис күшінің бағыты әрі көшпелі $\mathbf{v}'$ жылдамдығына, әрі айналыс осіне перпендикуляр болады. $\mathbf{f}$ күшінің бағытын анықтау үшін бұрыштық ω жылдамдық векторын пайдаланамыз (13-параграфты қараңыз). Сонда $\mathbf{f}_k$ Кориолис күшінің бағыты $\boldsymbol{\omega}$ және $\mathbf{v}'$ векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр болады (53-сурет), егер бұрғының басы $\mathbf{v}'$ векторынан $\boldsymbol{\omega}$ векторына қарай (кішкене бұрыш бағыты бойынша) айналса, сонда $\mathbf{f}_k$ күшінің бағыты бұрғының ілгерілемелі қозғалысының бағытымен дәл келеді.

Егер векторлық анализдің белгілеулерін пайдалансақ, онда $\mathbf{f}_k$ күші $\mathbf{v}'$ және ω векторларының векторлық көбейтіндісі түрінде анықталады:

$$f_k = 2[\mathbf{v}' \times \omega]m. \tag{4a}$$

Тәуліктік айналыстағы жер шарының белгілі бұрыштық жылдамдығы бар, сондықтан жер бетінде қозғалғанда Кориолис күші білінеді. Мысалы, поезд солтүстік жарты шарда меридиандық бағытпен солтүстікке қарай жүріп бара жатсын (54-суреттегі a нүктесі). Сонда салыстырмалы жылдамдығының $\mathbf{v}'$ векторы мен бұрыштық жылдамдықтың ω векторының аралығында α сүйір бұрышы түзіледі, егер бетімізді поездың бара жатқан жағына бұрсақ, Кориолис күші $\mathbf{f}_к$ жер бетіне жүргізілген жанама бойымен оңға бағытталады. Поезд сол жақтағы рельстен гөрі оң жақтағы рельске көбірек қысым түсіреді. Оңтүстік жарты шарда поезд оңтүстікке қарай қозғалғанда (54-суреттегі a' нүктесі) $\mathbf{v}'$ пен ω векторлары аралығында доғал бұрыш пайда болады да, Кориолис күші поездың қозғалыс бағытымен салыстырғанда сол жаққа қарай бағытталады. Солтүстік жарты шарда өзеннің оң жағасын, оңтүстік жарты шарда өзеннің сол жағасын судың жуып кетуі (Бердің заңы), солтүстік жарты шарда солтүстік-шығыс пассаттарының пайда болуы т. т. Кориолис күшінің ететін әсеріне байланысты.



54-сурет. Жердің бетімен қозғалған денеге әсер ететін Кориолис күштерінің бағыты.

Жер шарының бетінде денелердің қозғалысына Кориолис күштерінің тигізетін ықпалының басқа бір мысалы мыналар: еркін түскен денелердің тік бағыттан шығысқа қарай ауытқуы және маятниктің тербеліс жазықтығының ауытқуы. Соңғы жағдайды біраз толығырақ қарастырайық. Мәселені жеңілдету үшін, маятник солтүстік полюсте тербеледі деп жориық. Сонда маятник жүгінің $\mathbf{v}'$ жылдамдығы (жіп ұзын болса) ұдайы жер шары осіне перпендикуляр болады, демек $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\omega}$, мұндағы ω — бұрынғыша Жер айналысының бұрыштық жылдамдығының векторы. Осының нәтижесінде маятниктің жүгіне Кориолис күші әсер етеді, ол горизонталь жазықтықта жатады, $\mathbf{v}'$ векторымен салыстырғанда оң жаққа қарай бағытталады, оның сан мәні $f_k = 2mv'\omega$. Осы күштің әсерінен маятниктің жүгі тербелген сайын оң жаққа қарай ауады. Осының нәтижесінде маятниктің тербеліс жазықтығы Жермен салыстырғанда сағат тілінің бағыты бойынша ауады да, бір тәулік ішінде 2π бұрышқа бұрылады. Егер маятник φ ендікте тербелсе, онда тербеліс жазықтығы бір тәулікте $2\pi \sin \varphi$ бұрышқа бұрылады.

Маятниктің тербеліс жазықтығының ауыуын ең алғаш 1851 жылы Фуко бақылаған, бұл құбылыс Жердің тәуліктік айналысы барлығына тура дәлел болып табылды.